**TS** **DEVOIR 13 (C5).**

**EXERCICE N° 1 :**

**1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ :**
**a)** $\ln(2x^2 - 3x) = \ln(3x - 4)$ **b)** $\ln(x - 4) < 2\ln 3 - \ln(2x - 1)$
**2) Déterminer le domaine de définition $D_f$ ; le domaine de dérivabilité $D_{f'}$ et la dérivée $f'$ de la fonction $f$ définie par :** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)$.

**EXERCICE N° 2 :**
**Le candidat choisira une ROC parmi les choix 1 et 2 ci-dessous :**

**CHOIX 1 :**

**PARTIE A : Restitution organisée des connaissances**
**Pré-requis :**
(1) La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
(2) $\ln(1) = 0$
**1.** Démontrer que pour tous réels strictement positifs $a$ et $x$, on a : $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.
**2.** Utiliser le résultat précédent pour démontrer que, pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$, on a :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ et } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

**ATTENTION À RESPECTER LES PRÉ-REQUIS …**

**CHOIX 2 :**

**PARTIE A : Restitution organisée des connaissances**
**Pré-requis :**
(1) On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
(2) On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que pour tout $x$ de $]0\,;+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.

**1.** Montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à $x$ associe $\dfrac{1}{x}$.

**2.** Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction $\ln \circ u$ où $u$ est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

**PARTIE B - Étude de fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

Le but du problème est l'étude de cette fonction.

On note $C$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

**I - Étude d'une fonction auxiliaire**
On considère la fonction $g$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.
**1.** Étudier les variations de $g$ sur $]0\,;+\infty[$.
**2.** En déduire le signe de $g$ sur $]0\,;+\infty[$.

**II - Étude de la fonction $f$**
**1.** Déterminer la limite en 0 de la fonction $f$.
Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
**2.** Déterminer la limite en $+\infty$ de $f$ puis montrer que la droite $D$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $C$.
**3.** Soit $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$ de $]0\,;+\infty[$.
**4.** En déduire le sens de variation de $f$ sur $]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
**5.** Déterminer le point A de la courbe $C$ en lequel la tangente $T$ est parallèle à la droite $D$.