ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.

FICHE 1 :

EXERCICE N° 1 :
45 page 103 du LIVRE :

a) Les fonctions : $x \longmapsto Ce^{3x}$ où $C \in \mathbb{R}$; **b)** Les fonctions : $x \longmapsto Ce^{-2x}$ où $C \in \mathbb{R}$

46 page 103 du LIVRE :

a) Les fonctions : $x \longmapsto Ce^{-\frac{3}{2}x}$ où $C \in \mathbb{R}$; **b)** Les fonctions $x \longmapsto Ce^{\frac{5}{3}x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N° 2 : 102 page 114 du LIVRE :

1) * On pose $g : x \longmapsto e^{ax}$. g est solution de (E) d'après le pré-requis.

Soit $f : x \longmapsto Ce^{ax}$ pour tout réel x. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a : $f = Cg$, donc $f' = Cg' = C \times a \times g$ car g est solution de (E) d'après le pré-requis.
D'où : $f' = a \times f$ ce qui prouve que f est solution de (E).

* Réciproquement, soit f une solution de (E).

On définit la fonction h par : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (on a $g(x) \neq 0$ pour tout réel x).

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas, et on prouve que : $h'(x) = 0$ pour tout réel x. Comme $h'(x) = 0$ pour tout réel x et que $\mathbb{R}$ est un intervalle, alors la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel C tel que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $h(x) = C$.

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Cg(x) = Ce^{ax}$.

<u>Conclusion</u> : Toute solution de (E) est de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$ avec C constante réelle.

2) (E') $y' = ay - 20a$.

Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme : $x \longmapsto Ce^{ax} - \dfrac{(-20a)}{a}$ c'est-à-dire

$x \longmapsto Ce^{ax} + 20$.

3) D'après les données de l'énoncé : $\begin{cases} \theta'(t) = a\big(\theta(t) - 20\big) \\ \theta(0) = 70 \\ \theta(5) = 60 \end{cases}$

$\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$\theta'(t) = a\big(\theta(t) - 20\big) \Leftrightarrow \theta'(t) = a\theta(t) - 20a$ donc θ est solution de l'équation (E') du 2) et par suite :

$\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $\theta(t) = Ce^{at} + 20$ (t en minutes). D'autre part :

$$\begin{cases} \theta(0) = 70 \\ \theta(5) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C + 20 = 70 \\ Ce^{5a} + 20 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 50 \\ 50e^{5a} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 50 \\ e^{5a} = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 50 \\ 5a = \ln 0{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 50 \\ a = \dfrac{\ln 0{,}8}{5} \end{cases}$$

Donc : $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $\theta(t) = 50 \times e^{\frac{\ln 0{,}8}{5}t} + 20 = 50\big(e^{\ln 0{,}8}\big)^{\frac{t}{5}} + 20 = 50 \times 0{,}8^{\frac{t}{5}} + 20$.

$\theta(30) = 50 \times 0{,}8^{\frac{30}{5}} + 20 = 50 \times 0{,}8^6 + 20 \approx 33{,}11\,°\mathrm{C}$.

<u>Conclusion</u> : 30 minutes après l'instant initial, la température du liquide sera d'environ 33 °C.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.
EXERCICE N° 3 :
50 page 103 du LIVRE :

D'après le cours, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ et vérifiant la condition initiale $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Or, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $u'(x) = -2 \times u(x)$. Donc u est solution de l'équation différentielle et $u \in \mathcal{E}$. Comme $u\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, alors u est la fonction f précédente.

51 page 103 du LIVRE.

a) Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto Ce^{2x} - \frac{1}{2}$ où $C \in \mathbb{R}$;

b) Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto Ce^{-\frac{1}{3}x} + 2$ où $C \in \mathbb{R}$;

c) Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto Ce^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$ où $C \in \mathbb{R}$;

d) Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x} + 1$ où $C \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N° 4 : TD 4 pages 99//100 du LIVRE.

$\boxed{\mathbf{1}}$

1) h est dérivable sur I et $\forall x > 0$, on a : $h'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$.

On vérifie qu'on a bien : $\forall x > 0$, $h(x) - h'(x) = \frac{e^x}{x^2}$, ce qui prouve **que h est solution de (E).**

2) a) g est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x > 0$, on a $g(x) - g'(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

Or, h est solution de (E), donc : $\forall x > 0$, $h(x) - h'(x) = \frac{e^x}{x^2}$. D'où :

$\forall x > 0$, on a : $g(x) - g'(x) = h(x) - h'(x)$ ou $(g - h)(x) - (g - h)'(x) = 0$, ce qui prouve que la fonction

$(g - h)$ est solution de l'équation (E_1).

2) b) Réciproquement, on suppose que la fonction $(g - h)$ est solution de l'équation (E_1), donc :

$\forall x > 0$, on a : $(g - h)(x) - (g - h)'(x) = 0$. D'où : $\forall x > 0$, on a : $g(x) - g'(x) = h(x) - h'(x) = \frac{e^x}{x^2}$ car h est solution de l'équation (E). Ce qui prouve que **la fonction g est solution de l'équation (E).**

3) Les fonctions $x \longmapsto Ce^x$ où $C \in \mathbb{R}$.

4) D'après le résultat de la question 2), on a :

g solution de (E) $\Leftrightarrow$ $g = g_1 + h$ où g_1 est une solution de (E_1) et $h : x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ ($x \in$ I).

On en déduit que les solutions sur I de l'équation (E) sont les fonctions $x \longmapsto Ce^x + \frac{e^x}{x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.

$\boxed{2}$

1) On trouve que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - x + 1$ et les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{-x} + x^2 - x + 1$ où $C \in \mathbb{R}$.

2) On trouve que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x - 2\sin x$ et les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} + \cos x - 2\sin x$ où $C \in \mathbb{R}$.

EXERCICE N° 5 :
79 page 109 du LIVRE :

1) Les fonctions : $\boldsymbol{x \longmapsto Ce^{-\frac{3}{2}x}}$ **où** $\boldsymbol{C \in \mathbb{R}}$.

2) a) On trouve $\boldsymbol{f : x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}}$.

2) b) g et f sont solutions de (E'), donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $2g'(x) + 3g(x) = x^2 + 1 = 2f'(x) + 3f(x)$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $2(g - f)'(x) + 3(g - f)(x) = 0$, ce qui prouve que **la fonction $\boldsymbol{(g - f)}$ est une solution de (E).**

2) c) Réciproquement, si $(g - f)$ est solution de (E), alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $2(g - f)'(x) + 3(g - f)(x) = 0$.

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $2g'(x) + 3g(x) = 2f'(x) + 3f(x) = x^2 + 1$ car f est solution de l'équation (E').

Ce qui prouve que **la fonction $\boldsymbol{g}$ est solution de l'équation (E').**

2) d) D'après le résultat des questions 2) b) et 2) c), on a :

g solution de (E') $\Leftrightarrow$ $g = g_1 + f$ où g_1 est une solution de (E) et $f : x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}$ ($x \in \mathbb{R}$).

On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E') sont les fonctions :

$$\boldsymbol{x \longmapsto Ce^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}} \textbf{ où } \boldsymbol{C \in \mathbb{R}}.$$

3) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E'') sont les fonctions :

$$\boldsymbol{x \longmapsto Ce^{-\frac{3}{2}x} + \frac{3}{13}\cos x + \frac{2}{13}\sin x} \textbf{ où } \boldsymbol{C \in \mathbb{R}}.$$

<u>81 page 109 du LIVRE.</u>

1) On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g : x \longmapsto -4\cos 2x + \sin 2x$.

2) * On commence par prouver :

f est solution de l'équation différentielle (E) : $2y' + y = h$ où h est la fonction telle que $h(x) = 17\sin 2x \Leftrightarrow$

$f - g$ est solution de (E') : $2y' + y = 0$ avec $g : x \longmapsto -4\cos 2x + \sin 2x$ pour tout réel x.

* On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions

$\boldsymbol{x \longmapsto Ce^{-\frac{1}{2}x} - 4\cos 2x + \sin 2x}$ **où** $\boldsymbol{C \in \mathbb{R}}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.

EXERCICE N° 6 : ***Extrait de France métropolitaine (juin 2010)***
Partie A

1. Les fonctions $x \longmapsto -x$ et $x \longmapsto e^{x}$ sont dérivables sur ℝ, donc par composition, la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur ℝ. Comme la fonction $x \longmapsto x$ est aussi dérivable sur ℝ, alors, par produit, la fonction u est dérivable sur ℝ. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - u(x)$.

Pour tout réel x, on a donc : $u'(x) + u(x) = e^{-x}$, ce qui prouve que **la fonction *u* est solution de (E).**

2. L'équation différentielle (E') est une équation différentielle du type $y' = ay$ avec a = - 1.

D'après le cours, l'ensemble des solutions de (E') est donc l'ensemble des fonctions *f* définies sur ℝ par $f(x) = Ce^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

3.

***** v et u sont solutions de (E), donc $(v - u)$ est dérivable sur ℝ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :
$v'(x) + v(x) = e^{-x} = u'(x) + u(x)$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(v - u)'(x) + (v - u)(x) = 0$, ce qui prouve que **la fonction $(v - u)$ est une solution de (E').**

* Si $(v - u)$ est solution de (E'), alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(v - u)'(x) + (v - u)(x) = 0$.

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x) = e^{-x}$ car u est solution de l'équation (E). Ce qui prouve que **la fonction *v* est solution de l'équation (E).**

On a donc prouvé :

v solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v - u$ est une solution de (E').

4. D'après la question 2), $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E') équivaut à :

il existe un réel C tel que $(v - u)(x) = Ce^{-x}$ pour tout réel x.

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions *v* définies sur ℝ par $v(x) = (x + C)\, e^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

5. L'unique solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = 2$ est **la fonction définie sur ℝ par $g(x) = (x + 2)\, e^{-x}$.**

EXERCICE N° 7 : ***Extrait de La Réunion (juin 2005)*** **⇔ 83 page 109 du LIVRE avec modification de la question 2) :**

1. a. On fait un raisonnement par l'absurde.
Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
La fonction f vérifie la condition (C), donc pour $x = -x_0$, on obtient : $f(x_0) \times f'(-x_0) = 1$. Or, $f(x_0) = 0$, donc $f(x_0) \times f'(-x_0) = 0$, ce qui entraîne 0 = 1, ce qui est absurde !!!
La supposition est donc fausse et par suite, il n'existe aucun réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Conclusion : pour tout réel *x*, on a donc $f(x) \neq 0$, ce qui prouve que la fonction *f* ne s'annule pas sur ℝ.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.

1. b. Les fonctions $x \longmapsto -x$ et $x \longmapsto f(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $x \longmapsto f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par produit, on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = -f'(-x) \times f(x) + f(-x) \times f'(x)$.

Comme f vérifie la condition (C), on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f'(-x) = 1$ et par suite :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -1 + 1 = 0$.

Conclusion : $g'(x) = 0$ pour tout réel x.

1. c. g' est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
Or, $g(0) = 16$ car $f(0) = -4$ vu que f vérifie la condition (C).

Conclusion : g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et on a : $g(x) = 16$ pour tout réel x.

1.d. D'après la question 1) c), on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{16}{f(x)}$ (vu que $f(x) \neq 0$ pour tout réel x).

Or, f vérifie la condition (C), donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$ (vu que $f(-x) \neq 0$ pour tout réel x).

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{f(x)}{16}$ et f est bien solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{16}y$.

Comme f vérifie la condition (C), alors $f(0) = -4$.

Conclusion : f est solution de l'équation différentielle (E) et elle vérifie $f(0) = -4$.

2. a.

* On appelle g la fonction $x \longmapsto e^{\frac{x}{16}}$.

Si f est une fonction de la forme $x \longmapsto K \times e^{\frac{x}{16}}$ avec $K \in \mathbb{R}$, alors $f = Kg$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par produit) et on a : $f' = K \times g'$.

D'après le pré-requis, g est solution de (E), alors $g' = \dfrac{1}{16}g$. Par suite, $f' = K \times \dfrac{1}{16}g = \dfrac{1}{16}f$, ce qui prouve que **$f$ est solution de l'équation différentielle (E).**

* Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle (E).

On définit la fonction h par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (on a $g(x) \neq 0$ pour tout réel x).

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas, et on prouve que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 0$. Comme $h'(x) = 0$ pour tout réel x et que $\mathbb{R}$ est un intervalle, alors la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel K tel que : $h(x) = K$ pour tout réel x.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Kg(x) = K \times e^{\frac{x}{16}}$ avec K appartenant à $\mathbb{R}$.

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto Ke^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.

2. b. Soit f une solution de (E) prenant la valeur (-4) en 0.

Comme f est une solution de (E), alors il existe un réel K tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = K \times e^{\frac{x}{16}}$.
Or, $f(0) = -4 \Leftrightarrow -4 = K \times e^0 \Leftrightarrow K = -4$, ce qui prouve l'unicité de la fonction f cherchée.

La fonction $x \longmapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est l'unique solution de (E) prenant la valeur (-4) en 0.

3. D'après la question 1), si f vérifie la condition (C), alors f est solution de (E) et elle vérifie $f(0) = -4$.

D'après la question précédente, f est nécessairement la fonction : $x \longmapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ (du fait de l'unicité).
Il ne reste plus qu'à vérifier que cette fonction vérifie bien la condition (C).

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(-x) \times f'(x) = -4 \times e^{-\frac{x}{16}} \times (-4) \times \dfrac{1}{16} \times e^{\frac{x}{16}} = e^0 = 1$ et $f(0) = -4 \times e^0 = -4$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.

La condition (C) est donc vérifiée **et la fonction : $x \longmapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C).**

EXERCICE N° 8 : *Extrait de France métropolitaine (septembre 2007)*

1. L'équation différentielle (E_0) est une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec a = - 1 et b = 1.

D'après le cours, l'ensemble des solutions de (E_0) est donc l'ensemble des fonctions *f* définies sur

$\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ **par $f(x) = Ce^{-x} + 1$ où $C \in \mathbb{R}$.**

2. *f* est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, donc *f* définie par $f(x) = g(x)\cos x$ est solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ équivaut

à $\forall x$ de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) + (1 + \tan x)f(x) = \cos x$.

f définie par $f(x) = g(x)\cos x$ est solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ équivaut à

$\forall x$ de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)\cos x - g(x)\sin x + (1 + \tan x)g(x)\cos x = \cos x$.

f définie par $f(x) = g(x)\cos x$ est solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ équivaut à

$\forall x$ de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $[g'(x) + g(x)] \times \cos x = \cos x$.

Or, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos x \neq 0$, donc :

f définie par $f(x) = g(x)\cos x$ est solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ équivaut à

$\forall x$ de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) + g(x) = 1$ soit à *g* est solution de l'équation différentielle (E_0).

Conclusion : La fonction *f* définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = g(x)\cos x$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction *g* est solution de (E_0).

3. Soit *f* la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = (1 + Ce^{-x})\cos x$ (avec $C \in \mathbb{R}$).

D'après 2), *f* est solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ car la fonction $x \longmapsto 1 + Ce^{-x}$ est solution de (E_0) d'après la question 1).

On a $f(0) = 0$ équivaut à $C = -1$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.

La fonction $f : x \longmapsto (1 - e^{-x})\cos x$ pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ est donc solution de (E) et vérifie $f(0) = 0$.

Montrons que c'est la seule !

On montre pour cela que toute solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ est de la forme $x \longmapsto g(x)\cos x$ où g est une solution de (E_0).

Soit f une solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et soit la fonction h définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$h(x) = \dfrac{f(x)}{\cos x}$ (h existe sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ car, $\forall\, x$ de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \neq 0$).

h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ avec le dénominateur ne s'annulant pas sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$. $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $h'(x) = \dfrac{f'(x) \times \cos x + f(x) \times \sin x}{(\cos x)^2}$.

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{\cos x} + f(x) \times \tan x \times \frac{1}{\cos x}$$

$$h'(x) = \frac{f'(x) + f(x) \times \tan x}{\cos x}$$

Or, f est une solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, donc : $\forall\, x$ de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) + (1 + \tan x) \times f(x) = \cos x$.

D'où : $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $h'(x) = \dfrac{\cos x - f(x)}{\cos x}$.

On a alors : $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $h'(x) + h(x) = \dfrac{\cos x - f(x)}{\cos x} + \dfrac{f(x)}{\cos x} = 1$, ce qui prouve que h est une solution de (E_0). On a donc prouvé que si f est une solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, alors la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\cos x}$ est une solution de (E_0) donc, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $f(x) = g(x)\cos x$ avec g solution de (E_0).

D'après la question 2), on en déduit :

L'ensemble des solutions de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x \longmapsto g(x)\cos x$ où g est une solution de (E_0) sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction $f : x \longmapsto (1 - e^{-x})\cos x$ pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ est donc la seule solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.

FICHE 2 :

EXERCICE N° 1 : ***Extrait de France métropolitaine (juin 2004)***

1. x et x' sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$.

x est solution de l'équation différentielle (E) $\Leftrightarrow 25x' + 200x'' = 50$

$\Leftrightarrow x' + 8x'' = 2$

$\Leftrightarrow x'' = -\frac{1}{8}x' + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow$ x' est solution de l'équation différentielle (F)

(F) : $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$

Cette équation est du type $y' = \mathrm{a}y + \mathrm{b}$ avec $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^*$ et $\mathrm{b} \in \mathbb{R}$. Donc, par propriété du cours, ses solutions sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{\mathrm{a}x} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Les solutions de (F) sont donc de la forme : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $v(t) = Ce^{-\frac{t}{8}} + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$.

2. a) On a $x'(0) = v(0) = 0$. On en déduit que $C = -2$.

D'où : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x'(t) = -2e^{-\frac{t}{8}} + 2$.

2. b) La fonction $x : t \longmapsto 2t - 16 + 16e^{-\frac{t}{8}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme composée, produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$. On vérifie que : $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $x'(t) = -2e^{-\frac{t}{8}} + 2$ et que $x(0) = 0$.

Remarque : vous ne pouvez pas, pour l'instant, déterminer directement la fonction x !!!

3. $V = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(-2e^{-\frac{t}{8}} + 2\right)$ car : $\forall\, t \in \mathbb{R}^+$, $v(t) = x'(t)$.

$\boldsymbol{V = 2}$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{8}} = 0^+$ *(théorème de composition).*

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^+$: $v(t) \leq \frac{90}{100}V \Leftrightarrow -2e^{-\frac{t}{8}} + 2 \leq \frac{9}{5} \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{8}} \geq \frac{1}{10} \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{8}} \geq e^{\ln(0,1)}$

car $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ pour tout réel $x > 0$.

$v(t) \leq \frac{90}{100}V \Leftrightarrow -\frac{t}{8} \geq \ln(0,1) \Leftrightarrow t \leq -8 \times \ln(0,1)$ (et $t \in \mathbb{R}^+$)

Le chariot a une vitesse inférieure ou égale à 90 % de sa vitesse limite pour *t* compris entre 0 et 18 secondes (valeur arrondie à l'unité près par défaut).

4. On a $x(30) = 44 + 16e^{-\frac{15}{4}} \approx 44{,}4$.

La distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes est de 44,4 mètres, arrondie au décimètre près.

EXERCICE N° 2 : ***Extrait de France métropolitaine (septembre 2006)***

1. y_0 est une solution de (E_λ) sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$, donc : $y'_0 = y_0^2 + \lambda y_0$

D'où : $\frac{y'_0}{y_0^2} = 1 + \frac{\lambda}{y_0}$ car $y_0 \neq 0$ sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ (vu que $y_0 > 0$ sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$)

Or, la fonction $z = \frac{1}{y_0}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ (car la fonction y_0 est dérivable sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ et ne s'annule pas sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$) et $z' = \frac{-y'_0}{y_0^2}$ sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$.

Conclusion : $\boldsymbol{z' = -\lambda z - 1}$ sur $\boldsymbol{]-\infty\,;\frac{1}{2}[}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.
2. a.

1) Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ par $f(x) = g(x) - \frac{1}{\lambda}$ où g est une solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ (f existe car $\lambda \neq 0$ et g existe d'après le pré-requis et est de la forme $x \longmapsto Ce^{-\lambda x}$ où $C \in \mathbb{R}$). f est dérivable sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ comme différence de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$.

$\forall\, x \in\;]-\infty\,;\frac{1}{2}[$, on a : $f'(x) = g'(x) = -\lambda g(x)$ (car g est solution de l'équation $y' = -\lambda y$) et par suite :

$\forall\, x \in\;]-\infty\,;\frac{1}{2}[$, on a : $f'(x) = -\lambda\left(f(x) + \frac{1}{\lambda}\right) = -\lambda f(x) - 1$. Ceci prouve que f est solution de l'équation différentielle (E'_λ) d'où l'existence de solutions pour l'équation différentielle (E'_λ).

2) Réciproquement, démontrons que les fonctions $x \longmapsto g(x) - \frac{1}{\lambda}$ ($\lambda \neq 0$) sont les seules solutions de l'équation différentielle (E'_λ) (avec g solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$).

Soit f une solution de l'équation différentielle $z' = -(\lambda z + 1)$.

Considérons la fonction g définie par $g(x) = f(x) + \frac{1}{\lambda}$ pour tout réel x de $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ (g existe car $\lambda \neq 0$).

g est dérivable sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ et

$\forall\, x \in\;]-\infty\,;\frac{1}{2}[$, on a : $g'(x) = f'(x)$. Or, f est solution de l'équation différentielle $z' = -(\lambda z + 1)$, donc

$\forall\, x \in\;]-\infty\,;\frac{1}{2}[$, $f'(x) = -(\lambda f(x) + 1)$.

Par suite : $\forall\, x \in\;]-\infty\,;\frac{1}{2}[$, on a : $g'(x) = -(\lambda f(x) + 1) = -(\lambda\left(g(x) - \frac{1}{\lambda}\right) + 1) = -(\lambda g(x) - 1 + 1) = -\lambda g(x)$.

On en déduit que g est une solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$.

Par suite : $\forall\, x \in\;]-\infty\,;\frac{1}{2}[$, $f(x) = g(x) - \frac{1}{\lambda}$ avec g solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$.

Conclusion : Des points 1) et 2), on en déduit que les solutions sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ de l'équation différentielle (E'_λ) : $z' = -(\lambda z + 1)$ sont les fonctions définies sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$ par :

$f(x) = g(x) - \frac{1}{\lambda}$ (avec g solution de l'équation $y' = -\lambda y$). Par ailleurs, $f(0) = 1 \Leftrightarrow g(0) = 1 + \frac{1}{\lambda}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 3.

D'après le cours, il existe une unique solution à l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ vérifiant la condition initiale $g(0) = 1 + \frac{1}{\lambda}$, donc **il existe une unique solution z à l'équation différentielle (E'$_\lambda$) vérifiant la condition initiale $z(0) = 1$.**

2. b. D'après le résultat précédent, les solutions de l'équation différentielle (E'$_\lambda$) sont de la forme :

$x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$ où $C \in \mathbb{R}$. $f(0) = 1 \Leftrightarrow C - \frac{1}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{\lambda + 1}{\lambda}$.

Conclusion : $\forall\, x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$, $z_0(x) = \frac{\lambda+1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} = \frac{(\lambda+1)\mathrm{e}^{-\lambda x} - 1}{\lambda}$.