ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

FICHE 1

EXERCICE N° 5 :

<u>10 page 360</u> du LIVRE :

1) Les coordonnées cartésiennes de A ; B et C sont : A(1 ; 1) ; B(2 ; - 1) et C(1 + 2$\sqrt{3}$; 1 + $\sqrt{3}$).
2) On utilise le théorème :
A ; B et M sont des points d'affixes respectives z_A ; z_B et z telles que $z \neq z_A$ et $z \neq z_B$, alors
$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right)$.

3) On trouve : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{6}$.

On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A et que AB = $\frac{1}{2}$BC.

12 page 361 du LIVRE :

1) Les points E et F ont pour coordonnées cartésiennes : E(3 ; 1) et F(- 1 ; 2).
Le point H appartient au demi-cercle de diamètre [EF] « supérieur » et à la médiatrice de [EF].

2) a) $|Z| = 1$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$ car EHF est un triangle rectangle isocèle direct en H.

b) On en déduit que $Z = i$ et $z_H = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$.

18 page 361 du LIVRE :

1) Soit A(3 – 2i) le point origine de d_1.

$M(z) \in d_1 \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z - z_A) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z - 3 + 2i) = \frac{\pi}{2}$.

2) $M(z) \in d_2 \Leftrightarrow \arg(z - 2 - i) = \pi$; $M(z) \in d_3 \Leftrightarrow \arg(z - 1 - 3i) = -\frac{3\pi}{4}$;

$M(z) \in d_4 \Leftrightarrow \arg(z + 1 + 2i) = \frac{3\pi}{4}$.

19 page 362 du LIVRE :

a) Soit A(1). L'ensemble cherché est la demi-droite]At) privée du point A et passant par le point A'(2 + i).
b) Soit B(i). L'ensemble cherché est la demi-droite]By) privée du point B et passant par le point B'(2i).
c) Soit C(- i). L'ensemble cherché est la demi-droite]Cr) privée du point C et dirigée par $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{3}$.
d) Soit D(1 + i) L'ensemble cherché est la demi-droite]Ds) privée du point D et passant par le point B(i).

EXERCICE N° 6 :

<u>86 page 374</u> du LIVRE :

1) b) : $Z_{\overrightarrow{AB}} = -1 - 4i$ et $Z_{\overrightarrow{AC}} = 4{,}08 - 1{,}02i$.

On a, dans le repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $AB^2 = 17$; $AC^2 = 17{,}6868$.

- **2) b)** Soit A(4i) et B(- 2). On trouve que l'ensemble cherché est la médiatrice de [AB].
- **2) c)** Soit A(4i) et B(- 2). Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 4i$; $z \neq -2$:
  z' réel $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = 0$ ou $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \pi \Leftrightarrow M(z) \in (AB)$ et M distinct de A et M distinct de B.
  Enfin, lorsque $z = 4i$, alors $z' = 0$ et z' est un réel. Donc A est un point de l'ensemble cherché.
  L'ensemble cherché est la droite (AB) privée du point B.

88 page 374 du LIVRE :

1) A(a) ; B(b) et M(z). On suppose que $z \neq a$ et $z \neq b$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

$\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = \arg(z-b) - \arg(z-a)$ d'après le pré-requis 1).

$\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ d'après le pré-requis 2) …

$\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ car $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

2) a) Pour tout nombre complexe $z \neq 2i$ et $z \neq -1$,

$Z \in \mathbb{R}^{-*} \Leftrightarrow \arg(Z) = \pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$ avec M distinct de A et M distinct de B $\Leftrightarrow$ M $\in$]AB[.
L'ensemble cherché est le segment ouvert]AB[.

2) b) Pour tout nombre complexe $z \neq 2i$ et $z \neq -1$,

Z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(Z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ avec M distinct de A et M distinct de B

Z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ M $\in$ cercle de diamètre [AB] avec M distinct de A et M distinct de B.
L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

EXERCICE N° 7 : *Extrait du sujet d'Amérique du Sud, novembre 2009.*

1. a. $z_{P'} = -1 - i$; **1. b.** $\overrightarrow{AP}(-1+i)$ et $\overrightarrow{BP'}(1-i)$ donc $\overrightarrow{BP'} = -\overrightarrow{AP}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BP'}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont donc colinéaires.

1. c. $\overrightarrow{PP'}(-2-2i)$ et dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, on a : $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{PP'} = 0$.

2. Pour tout point M distinct de A : M' = M $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} = z \Leftrightarrow \dots\ z \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des points invariants par *f* est l'axe $(O\ ;\ \vec{u})$ privé du point A.

3. a. Pour tout nombre complexe z, $(z-2)(\overline{z}-2) = |z-2|^2$ ce qui prouve que $(z-2)(\overline{z}-2) \in \mathbb{R}^+$.

3. b. Pour tout nombre complexe z distinct de 2, on a :

$\dfrac{z'+2}{z-2} = \dfrac{z\overline{z}-4}{(z-2)(\overline{z}-2)}$.

Or, $z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}^+$, donc $(z\overline{z}-4) \in \mathbb{R}$ et $(z-2)(\overline{z}-2) \in \mathbb{R}^+$ d'après la question 3. a., donc :

pour tout nombre complexe z distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est un réel.

3. c. Soit z_A ; z_B ; z et z' les affixes respectives des points A ; B ; M et M'.

Pour tout point M différent de A, on a (d'après 3. b.) : $\dfrac{z'-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}$.

$\dfrac{z'-z_B}{z-z_A} = 0 \Leftrightarrow z' = z_B \Leftrightarrow z' = -2 \Leftrightarrow |z| = 2 \Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre O et de rayon 2 privé du point A.
Si M appartient au cercle de centre O et de rayon 2 privé du point A, alors $z' = -2$.
M' est confondu avec B dans ce cas et la droite (BM') n'existe pas.

Si M n'appartient pas au cercle de centre O et de rayon 2, alors $z' \neq -2$ et $\dfrac{z'-z_B}{z-z_A}$ est un réel non nul.

$\dfrac{z'-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z'-z_B}{z-z_A}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ce qui prouve que les droites (AM) et (BM') sont parallèles pour tout point M n'appartenant pas au cercle de centre O et de rayon 2.

4. Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB).
On veut prouver que les droites(AM) et (MM') sont perpendiculaires.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

La droite (AB) est l'axe réel donc, comme M n'appartient pas à (AB), alors l'affixe de M n'est pas réelle et s'écrit sous la forme : $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, comme M n'est pas situé sur (AB), alors M est distinct de A et M' est distinct de M (d'après 2., les points invariants sont les points situés sur l'axe des réels privé de A). Par suite, les droites (AM) et (MM') existent bien.

On prouve que : $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe : $x - 2 + iy$ et $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe : $\dfrac{-4y^2}{(x-2)^2+y^2} + i\dfrac{4y(x-2)}{(x-2)^2+y^2}$.

Pour tout point M d'affixe non réelle $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), on a, dans le repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MM'} = 0$.

Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont donc orthogonaux, ce qui prouve que les droites (AM) et (MM') sont perpendiculaires.

5.

* Si M est un point de la droite (AB) privée du point A, alors son image M' est lui-même ;
* Si M appartient au cercle de centre O et de rayon 2 privé de A, alors son image M' est le point B.

* Si M n'appartient ni à la droite (AB), ni au cercle de centre O et de rayon 2, alors pour obtenir son image M' :
  - on trace la droite (d) parallèle à (AM) et passant par B ;
  - on trace la perpendiculaire (d') à la droite (AM) passant par M ;
  - le point d'intersection de ces deux droites donne le point M'.
* Pour vérification de la construction, on trouvera que le point Q'(- 0,2 ; - 3,6)

EXERCICE N° 8 :

44 page 366 du LIVRE :

$\mathscr{C}$ a pour centre le point Ω d'affixe $\frac{1}{2}$ et a pour rayon $r = \frac{1}{2}$.

A. 1. $A_0 \in \mathscr{C}$ car $\Omega A_0 = \left|a_0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

A. 2. a. $b' = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$; **2. b.** On prouve que $\dfrac{b' - b}{b' - 0} = i$. On en déduit que $(\overrightarrow{B'O}, \overrightarrow{B'B}) = \frac{\pi}{2}$ et B'O = B'B.

Ceci prouve que le triangle OBB' est rectangle isocèle en B'.

B. 1. a. Par l'énoncé, $z \neq 0$ et $a \neq 0$, donc $z' \neq 0$. De plus, $z \neq 0$ et $a \neq 1$, donc $z' \neq z$.

Par suite, $z' \neq 0$ et $z' - z \neq 0$, donc arg(Z) existe bien et $(\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M})$ existe bien.

D'une part, $\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{z' - z}{z'}\right) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{MM'})\ [2\pi]$ ou $\arg(Z) = (\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M})\ [2\pi]$ car

$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

D'autre part, $\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)\ [2\pi]$ et on obtient l'égalité demandée.

B. 1. b. $a \neq 0$ et $a \neq 1$ par énoncé, donc $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI})$ existe bien. $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI})\ [2\pi]$.

B. 1. c. OMM' est rectangle en M' $\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'O}, \overrightarrow{M'M}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ avec A distinct de O et A distinct de I.

OMM' est rectangle en M' ⇔ le triangle AOI est rectangle en A avec A distinct de O et A distinct de I.

OMM' est rectangle en M' ⇔ A est un point du cercle de diamètre [OI] privé des points O et I.

Conclusion : OMM' rectangle en M' (avec M et M' distincts de O) ⇔ A est un point du cercle $\mathscr{C}$ privé de O et I.

B. 2. M est un point de l'axe des réels distinct de O et I. A(a) est un point de $\mathscr{C}$ distinct de O et I.

M est un point de l'axe des réels distinct de O et I, donc $\arg(z) = 0\ [\pi]$.

$z \neq 0$ et $a \neq 0$ donc $z' \neq 0$ et par suite $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'})$ existe bien.
D'où : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{a}\right) = \arg(z) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow$ M' est un point de la droite (OA).
D'après B. 1. c., comme A est un point de $\mathscr{C}$ distinct de O et I, alors OMM' est rectangle en M'.
OMM' est rectangle en M', donc (MM') est perpendiculaire à (OM') ou à (OA) vu que M' est un point de (OA). Comme (MM') est perpendiculaire à (OA) et que M' est un point de (OA), alors on en déduit **que le point M' est le projeté de M sur la droite (OA).**

<u>47 page 366 du LIVRE</u> : **Corrigé dans le livre.**

a) Soit A(1). On prouve que $(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. L'ensemble cherché est la demi-droite]At) privée du point A et dirigée par le vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{5\pi}{6}$.

b) Soit B(2 + i). On prouve que $(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. L'ensemble cherché est la demi-droite]Bs) privée du point B et passant par B'(2).

c) Soit C(1 – i). On prouve que $(\vec{u}, \overrightarrow{CM}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. L'ensemble cherché est la demi-droite]Cr) privée du point C et dirigée par le vecteur $\vec{k}$ tel que $(\vec{u}, \vec{k}) = \frac{2\pi}{3}$.

58 page 368 du LIVRE.

1. a. Le point O a pour image le point B. Le point D(2 – i) a pour image le point C(1 + i).
1. b. L'équation $z' = z$ admet deux solutions : $z_1 = 1$ et $z_2 = -1$.
Il existe donc deux points invariants par l'application $z \longmapsto z'$: ce sont les points d'affixes 1 et (- 1).

2. Pour tout nombre complexe $z \neq -i$, on a : $z' = \frac{1 + iz}{z + i} = \frac{i(-i + z)}{z + i} = \frac{i(z - i)}{z + i}$.
Par interprétation géométrique du module et d'un argument d'un nombre complexe, on en déduit que :
OM' = $|z'| = \left|\frac{i(z - i)}{z + i}\right| = \frac{MA}{MB}$ et (pour M distinct de A et de B), on a :

$$\arg(z') = (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + \arg(z - i) - \arg(z + i)\ [2\pi] = \ldots = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})\ [2\pi].$$

3. L'axe des réels est la médiatrice de [AB], donc si M est un point de l'axe des abscisses, alors M est équidistant de A et B. Par suite : MA = MB et OM' = 1.
Ceci prouve que, dans ce cas, le point M' est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1.

4. Si M appartient au cercle de diamètre [AB] privé de A et B, alors : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

D'après la question 2., on en déduit : $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + k'\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.

On a donc : $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = k''\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k'' \in \mathbb{Z}$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = 0\ [\pi]$.
Ce qui prouve que M' est un point de l'axe des abscisses.

EXERCICE N° 9 : ***Extrait du sujet Nouvelle-Calédonie, novembre 2005.***

1. $z_{A'} = 0$; $z_{B'} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$; $z_{C'} = -2 - i$.
Les points A ; B ; C ; A' ; B' et C' ont pour coordonnées cartésiennes respectives : A(1 ; 2) ; B(1 ; 0) ; C(0 ; 3) ; A'(0 ; 0) ; B'$\left(\frac{4}{3} ; \frac{2}{3}\right)$ et C'(- 2 ; - 1). **Attention à l'échelle** : l'unité graphique est 3 cm.

2. $\mathrm{Re}(z') = \frac{1}{3}(4x - 2y)$ et $\mathrm{Im}(z') = \frac{1}{3}(2x - y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

3. On résout : $z' = z$. $z' = z \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(4x - 2y) \\ y = \frac{1}{3}(2x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x.$

M(z) avec ($z = x + iy$) est un point invariant par $f \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$

$\Leftrightarrow$ M est un point de la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

On remarque que les points A' ; B' et C' appartiennent à la droite (D).

4. Soit M (x ; y) un point quelconque du plan. Son image M' par f a pour coordonnées :
$x_{M'} = \frac{2}{3}(2x - y)$ et $y_{M'} = \frac{1}{3}(2x - y)$. On a donc $y_{M'} = \frac{1}{2}x_{M'}$, ce qui prouve que le point M' appartient à la droite (D).

5. a. Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\frac{z' - z}{z_A} = \frac{1}{1 + 2i}\left[\frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6} - z\right] = \frac{1 - 2i}{5}\left[\frac{1}{6}(-3 + 4i)z + \frac{5}{6}\bar{z}\right] = \frac{(5 + 10i)}{30}z + \frac{1 - 2i}{6}\bar{z} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i\frac{z - \bar{z}}{3}.$$

Or, $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$. On en déduit que :

$\frac{z + \bar{z}}{6} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{3}$ et $i\frac{z - \bar{z}}{3} = \frac{-2\mathrm{Im}(z)}{3}$, ce qui prouve que $\frac{z + \bar{z}}{6}$ est réel et que $i\frac{z - \bar{z}}{3}$ est réel, donc $\frac{z' - z}{z_A}$ est bien réel.

5. b. Si M' $\neq$ M, alors $\frac{z' - z}{z_A}$ est non nul, donc un argument de $\frac{z' - z}{z_A}$ existe bien.

D'après la question 5. a., $\frac{z' - z}{z_A}$ est un réel, donc :

$\frac{z' - z}{z_A} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z' - z}{z_A}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'}) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow$ (OA) et (MM') sont parallèles.

6. *Si N $\in$ (D), alors N est invariant par f et donc N est confondu avec son image N'.
* Si N $\notin$ (D), alors, d'après la question 4., on a N' qui appartient à (D).
Comme N' $\neq$ N (car N n'est pas invariant par f), alors (NN') et (OA) sont parallèles d'après la question 5. b. N' est donc le point d'intersection de la droite (D) et de la parallèle à (OA) passant par N.

EXERCICE N° 10 : *Extrait du sujet Amérique du Sud, novembre 2004.*

Les points A ; B ; C ; Ω et P ont pour coordonnées cartésiennes respectives :
A(5 ; 5) ; B(1 ; 3) ; C(8 ; - 4) ; Ω(5 ; 0) et P(10 ; 0).

Le rayon du cercle Γ est $\frac{1}{2}$OP = 5.

A. 1. $\Omega A = |a - \omega| = |5i| = 5$ où ω désigne l'affixe du point Ω.
$\Omega B = |-4 + 3i| = 5$ et $\Omega C = |3 - 4i| = 5$.
On a $\Omega A = \Omega B = \Omega C = 5$, ce qui prouve que les points A ; B et C appartiennent au cercle Γ.

A. 2 . D a pour coordonnées cartésiennes (2 ; 2).

* $Z_{\overrightarrow{BD}} = 1 - i$ et $Z_{\overrightarrow{BC}} = 7 - 7i$, donc : $Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_{\overrightarrow{BD}}$ qui équivaut à $\overrightarrow{BC} = 7\overrightarrow{BD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires, ce qui prouve que les points B ; C et D sont alignés.
On a donc prouvé que le point D appartient à la droite (BC).

* Le vecteur $\overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées (2 ; 2) et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (7 ; - 7).

Dans le repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), on a : $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{BC} = 0$, ce qui prouve que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux et donc les droites (OD) et (BC) sont perpendiculaires.
Sous ces deux conditions, on en déduit que le point D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

B. 1. Pour tout nombre complexe z non nul, on a : $z'\overline{z} = 20$.

z et z' sont non nuls, donc $\arg(z'\overline{z})$ existe bien. On obtient alors :

$\arg(z') - \arg(z) = 0\ [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0\ [2\pi] \Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et de même sens.
On a donc prouvé que les points O ; M et M' sont alignés quel que soit le point M du plan distinct de O.

2. a. L'affixe du point M est $z = 2 + iy$ où y est un réel quelconque. On obtient alors : $z + \overline{z} = 4$.

2. b. Comme M appartient à Δ, alors M est distinct de O, donc z' existe.

Pour tout point M de Δ d'affixe z, on a : $z' + \overline{z'} = \dfrac{20(z + \overline{z})}{z\,\overline{z}} = \dfrac{80}{z\,\overline{z}}$.

On en déduit alors que, pour tout point M de Δ d'affixe z : $5(z' + \overline{z'}) = \overline{z'} \times z'$.

Conclusion : $5(z' + \overline{z'}) = z' \times \overline{z'}$.

2. c. En posant $z' = x' + iy'$ ($x' \in \mathbb{R}$ et $y' \in \mathbb{R}$), on obtient : $10x' = x'^2 + y'^2$.
On prouve que : $\Omega M' = 5 \Leftrightarrow M' \in \Gamma$, où Γ est le cercle de centre Ω et de rayon 5 (partie A).
Par ailleurs, d'après B. 1., on sait que les points O ; M et M' sont alignés, donc M' est un point de (OM).
Le point M' est donc le point d'intersection (différent de O) de la droite (OM) et du cercle Γ.
Construction : On place un point quelconque M sur Δ. Pour obtenir M', image de M, on trace la droite (OM) qui coupe le cercle Γ en les points O et M'.

EXERCICE N° 11 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, on note A ; B ; C et D les points d'affixes respectives : $-1 + 2i$; $3 + 2i$; $4i$ et (-2).

1) a) $|z + 1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow AM = 3 \Leftrightarrow$ M est sur le cercle de centre A et de rayon 3.

1) b) $|\overline{z} - 3 + 2i| = |z - 4i| \Leftrightarrow |\overline{z - 3 - 2i}| = |z - 4i| \Leftrightarrow |z - 3 - 2i| = |z - 4i| \Leftrightarrow BM = CM$

$|\overline{z} - 3 + 2i| = |z - 4i| \Leftrightarrow$ M est situé sur la médiatrice de [BC].

1) c) $2|z + 2| = |(1 + i\sqrt{3})z + 4\sqrt{3} - 4i|$
$(1 + i\sqrt{3})z + 4\sqrt{3} - 4i = (1 + i\sqrt{3})\,z + 4i(-1 - i\sqrt{3}) = (1 + i\sqrt{3})(z - 4i)$ et par suite :
$|(1 + i\sqrt{3})z + 4\sqrt{3} - 4i| = 2|z - 4i|$
$2|z + 2| = |(1 + i\sqrt{3})z + 4\sqrt{3} - 4i| \Leftrightarrow 2|z + 2| = 2|z - 4i| \Leftrightarrow |z + 2| = |z - 4i| \Leftrightarrow DM = CM$
$2|z + 2| = |(1 + i\sqrt{3})z + 4\sqrt{3} - 4i| \Leftrightarrow$ M est situé sur la médiatrice de [DC].

2) a) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 4i$, on a :

$\arg(z - 4i) = \dfrac{\pi}{3}\ [\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{CM}) = \dfrac{\pi}{3}\ [\pi] \Leftrightarrow$ M est un point de la droite (CM_1), privée du point C, où M_1 est un point tel que : $(\vec{u}, \overrightarrow{CM_1}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

2) b) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 3 + 2i$, on a :

$\arg(\overline{z} - 3 + 2i) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg(\overline{z - 3 - 2i}) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z - 3 - 2i) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\arg(\overline{z} - 3 + 2i) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

L'ensemble cherché est la demi-droite d'origine B, privée de B, et passant par le point B'$(4 + 3i)$.

2) c) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq -2$ et $z \neq -1 + 2i$, on a :

$\arg\left(\dfrac{z + 2}{z + 1 - 2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{DM}) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow$ ADM est un triangle rectangle en M avec M distinct de A et M distinct de D. **L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [AD] privé des points A et D.**

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

FICHE 2

EXERCICE N° 1 : *Extrait de l'épreuve du concours ESIEE (mai 2010)*

(A) FAUX. On prouve que : $z = 24\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(B) et (C) VRAI. On prouve que $z' = 12e^{i\frac{5\pi}{6}}$ d'où :

$a = \frac{z}{z'} = 2e^{-i\frac{7\pi}{6}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $a = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$.

(D) VRAI. $a^2 + 2a\sqrt{3} + 4 = (-\sqrt{3} + i)^2 + 2(-\sqrt{3} + i) \times \sqrt{3} + 4 = 3 - 2\sqrt{3}i - 1 - 6 + 2\sqrt{3}i + 4 = 0$.

(E) FAUX. $a^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $\overline{a}^4 = 16e^{-i\frac{4\pi}{3}}$. On prouve que $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{\overline{a}^4} = \frac{1}{16} \times 2 \times \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{8} \times -\frac{1}{2} = -\frac{1}{16}$.

EXERCICE N° 2 :

35 page 335 du LIVRE :

$z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = \sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{12}}$; $z_3 = (\sqrt{2} - 1)e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $z_4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $z_5 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$.

37 page 335 du LIVRE :

1. a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ sous forme algébrique.

1. b) On prouve que $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$ sous forme exponentielle.

2. Le module de $\frac{z_1}{z_2}$ est donc $\sqrt{2}$ et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$ est $\frac{11\pi}{12}$ (modulo 2π).

On en déduit la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$.

D'après 1. a), on a : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$ et par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on déduit que : $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

38 page 335 du LIVRE :

1. $\boldsymbol{c} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\boldsymbol{d} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2. a) Pour placer le point B, tracer le triangle équilatéral OAB.

Pour placer le point C, tracer à la règle et au compas, la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ et sur cette demi-droite, placer le point C d' abscisse $\frac{3}{2}$.

Pour placer le point D, tracer à la règle et au compas, la demi-droite d'origine O et dirigée par le vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u} ; \vec{w}) = -\frac{\pi}{6}$; sur cette demi-droite, placer le point D d' abscisse $\frac{3}{4}$.

2. b) On prouve que OA = AC = BC = OB (= 1), ce qui démontre que **OACB est un losange**.

$OA = |a| = |1| = 1$; $AC = |c - a| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$ etc …

58 page 337 du LIVRE :

1) * Les solutions sont $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

* $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$. On en déduit alors que les solutions sont : 1 ; j et $\overline{j}$ (racines cubiques de l'unité).

2) a) $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On en déduit : $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On peut aussi utiliser le fait que $j^2 = -j - 1$ car j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

$j^3 = e^{i2\pi} = 1$ et $j^{2006} = j^{3\times 668+2} = (j^3)^{668} \times j^2 = j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) b) S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison j différente de 1. D'où :

$\mathbf{S} = 1 \times \frac{1 - j^{2007}}{1 - j} = \frac{1-(j^3)^{669}}{1-j} = \mathbf{0}$ car $j^3 = 1$.

EXERCICE N° 3 (*ANNABAC 2012*) :

Exercice 1 pages 63//64 : correction pages 69/70/71.

Attention aux erreurs …

5) Lire le vecteur $\overrightarrow{JG}$ et non $\overrightarrow{GJ}$ a pour affixe $g - j = \ldots$

6) b) Le vecteur $\overrightarrow{HK}$ a pour affixe $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et non $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. On montre en fait que $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{JA'}$.

Exercice 1 pages 155//156 : correction pages 161/162.

Exercice 13 page 242 : correction pages 256/257.

Remarque : en fait dans la question d), M appartient au cercle de diamètre [OA] privé de O et A.

Exercice 1 pages 222//223 : correction pages 227/228/229.

***<u>Exercice 11 page 241 :</u>* correction pages 254/255.**

EXERCICE N° 4 :

77 page 340 du LIVRE :

1) a) $e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)} = 1 + e^{i\theta} = z.$

1) b) D'après les formules d'Euler, on en déduit que : $z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Or, $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. Par suite, z s'écrit sous la forme $r\cos\alpha$ avec $r > 0$. On en déduit :

$|z| = r = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(z) = \alpha = \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$ ($z \neq 0$ donc arg(z) existe bien).

2) $Z = \frac{z}{e^{i\theta}}$ d'où $|Z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et comme $Z \neq 0$, $\arg(Z) = -\frac{\theta}{2}\ [2\pi]$.

<u>81 page 340 du LIVRE :</u>

On note $S' = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

1) $S' - e^{i\frac{\pi}{5}}S' = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} - e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{i\frac{2\pi}{5}} - e^{i\frac{3\pi}{5}} - e^{i\frac{4\pi}{5}} - e^{i\frac{5\pi}{5}} = 1 - e^{i\pi} = 1 - (-1) = 2.$

D'où : $S' = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}}$.

2) <u>D'une part</u> :

$S' = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} = \cos\left(0 \times \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(0 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

$$S' = \sum_{k=0}^{4} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right) + i\left[\sum_{k=0}^{4} \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)\right] = \mathbf{C + \mathit{i}S}$$

D'autre part, d'après la question 1) :

$$S' = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{2}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{2\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]}{\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{2\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]}{1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$S' = \frac{2\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]}{1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1} = \frac{\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} + i\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$S' = 1 + i\,\frac{2 \times \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)} = 1 + i\frac{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \mathbf{1 + \mathit{i} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}} \text{ OUF !!!}$$

(car $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$)

D'où : **C = 1** et **S** = $\mathbf{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}}$.

Autre méthode (beaucoup plus rapide !!!) :

$$S' = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{10}} \times 2 \times e^{-i\frac{\pi}{10}}}{e^{i\frac{\pi}{10}}\left(e^{-i\frac{\pi}{10}} - e^{i\frac{\pi}{10}}\right)} = \frac{2 \times e^{-i\frac{\pi}{10}}}{-2 \times i \times \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)} \text{ (Formule d'Euler : } \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta)$$

$$S' = \frac{1}{-i} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)} = i\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)} - i\right) = i\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)} - i\right) = \mathbf{1 + \mathit{i} \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}} \text{ et on retrouve :}$$

C = 1 et **S** = $\mathbf{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}}$.

84 page 341 du LIVRE :

1) $|z'| = \frac{2}{|z|}$ et $\arg(z') = \pi - \arg(z)$ pour tout nombre complexe z non nul.

2) a) $M(z) \in D \Leftrightarrow |z| \leq 2$ et $z \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{|z|} \geq 1$ et $z \neq 0 \Leftrightarrow |z'| \geq 1$

M'(*z*') décrit le plan complexe privé de l'intérieur du disque de centre O et de rayon 1.

2) b) $M(z) \in]OA] \Leftrightarrow 0 < |z| \leq 2$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \Leftrightarrow |z'| \geq 1$ et $\arg(z') = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \Leftrightarrow M' \in [Bt)$ où B est le point d'affixe b tel que $|b| = 1$ et $\arg(b) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

M'(*z*') décrit la demi-droite [B*t*) avec $\mathbf{(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]}$ **et OB = 1.**

105 page 344 du LIVRE :

1) Réponse b.

$z^2 = \left(-\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)^2 - 2i \times \sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2 = 2 + \sqrt{2} - 2i \times \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

2) Réponse b.

$|z^2| = 4$ et $z^2 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

3) Réponse a.

Posons $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre, on en déduit que : $z^2 = r^2e^{2i\theta}$.

D'après 2), on a : $z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On en déduit que : $r^2 = 4$ et $2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Vu que $r > 0$, alors $r = 2$ et vu que $\text{Re}(z) < 0$ et $\text{Im}(z) > 0$, alors $\theta = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$ $[2\pi]$. D'où : $\boldsymbol{z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}}$.

EXERCICE N° 5 : *Extrait de l'épreuve du concours ESIEE (mai 2010)*

(A) VRAI. On prouve que $b = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. On trouve alors que $b^6 = 64$ et $64 \in \,]0\,;+\infty[$. Donc $n = 6$.

(B) VRAI. $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $b^p \in \,]-\infty\,;0[\Leftrightarrow \arg(b^p) = \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow p \times \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On trouve alors que $p = 6k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$ car $p \in \mathbb{N}^*$.

(C) VRAI. On cherche $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \times \frac{\pi}{3} = 0\ [2\pi]$ et $m \times \frac{-\pi}{4} = 0\ [2\pi]$.

On cherche donc m tel que : $m = 6k$ et $m = -8k'$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$.
$m = 24$ convient.

(D) FAUX. D'après la question (B), comme $r \in \mathbb{N}^*$, alors $r = 6k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

On a alors : $a^r = (\sqrt{2})^r \times e^{-i\frac{r\pi}{4}}$. On en déduit alors qu'il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $r = -(8k' + 4)$.
D'où une contradiction car r (non nul) serait à la fois pair et impair.

(E) VRAI. On trouve que $ab = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $(ab)^{12} = -2^{18} \in \,]-\infty\,;0[$. Donc $q = 12$ convient.

EXERCICE N° 6 : *Extrait du sujet Polynésie, septembre 2009.*

1. a. $a' = 3i$; $b' = 2i$. **1. b.** A(0 ; 1) ; B est sur le cercle (Γ) tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$; A'(0 ; 3) et

B'(0 ; 2). **1. c.** $\frac{-b}{b' - b} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-1}{2e^{i\frac{\pi}{3}} - 1} = \frac{-1}{1 + i\sqrt{3} - 1} = \frac{-1}{i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{-1}{i} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times i$.

1. d. $b \neq 0$ et $b' \neq b$, donc $\arg\left(\frac{-b}{b' - b}\right)$ existe et $\arg\left(\frac{-b}{b' - b}\right) = (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BO})$

$(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BO}) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times i\right) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ $\Leftrightarrow$ **OBB' rectangle en B**.

2. a. On développe $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(z + \frac{1}{2}i\right)^2 - \frac{3}{4}$ et on trouve bien $z^2 + iz - 1$.

2. b. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$M(z) \in (E) \Leftrightarrow z' = 0 \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 0$

$M(z) \in (E) \Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \Leftrightarrow z = -b$ ou $z = \overline{b}$.

2. c. $|-b| = |b| = 1$ et $|\overline{b}| = |b| = 1$ donc les points de (E) appartiennent bien à (Γ).

3. a. Si $z = e^{i\theta}$ alors $z \neq 0$ et $z' = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta} = (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + i = (\cos\theta + i\sin\theta - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta)) + i$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

$z' = (\cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta) + i = 2i\sin\theta + i = (2\sin\theta + 1)i$.

3. b. Si M $\in$ (Γ), alors $|z| = 1$, donc $z \neq 0$ et par suite M' existe bien.

Si M $\in$ (Γ) alors $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

D'après 3. a., on en déduit que l'affixe de son image M' est égale à $(2\sin\theta+1)i$ qui est un imaginaire pur.
Donc M'appartient à l'axe des ordonnées et M'(0 ; $2\sin\theta+1$).
Comme A' a pour affixe $3i$ et C a pour affixe $(- i)$, alors A'(0 ; 3) et C(0 ; - 1).

De plus, pour tout θ appartenant à $\mathbb{R}$, $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ □ $- 1 \leq 2\sin\theta + 1 \leq 3$.
Conclusion : les points M' ; A' et C sont alignés sur l'axe des ordonnées et l'ordonnée de M' est comprise entre (− 1), ordonnée du point C et 3 ordonnée du point A′, donc M′ $\in$ [A′C].

EXERCICE N° 7 :

On cherche le rapport k de l'homothétie où $k \in \mathbb{R}^*$.
D'après le cours, l'écriture complexe de l'homothétie est : $z' - 0 = k(z - 0)$.

On trouve : $k = \dfrac{z_B}{z_A} = -\dfrac{1}{3}$.

Conclusion : l'écriture complexe de l'homothétie est $z' = -\dfrac{1}{3}z$.

EXERCICE N° 8 :

1) $z' = z + 5i \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{w}$ où $\vec{w}$ est le vecteur d'affixe ($5i$).

Conclusion : l'écriture donnée représente la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe ($5i$).
2) $z' = 7z - 3 + i$
On commence par chercher les points invariants : on trouve un seul point, que l'on note Ω, qui a pour affixe $\omega = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}i$.

$z' = 7z - 3 + i \iff z' - \omega = 7(z - \omega)$ où ω est le nombre vérifiant : $\omega = 7\omega - 3 + i$

$z' = 7z - 3 + i \iff \overrightarrow{\Omega M'} = 7\overrightarrow{\Omega M}$ où Ω est le point d'affixe ω valant $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}i$.

Conclusion : l'écriture donnée représente l'homothétie de rapport 7 et de centre Ω, le point d'affixe $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}i$.

EXERCICE N° 9 :

20 page 362 du LIVRE :

1) L'affixe de $\vec{w}$ est $- 2 + 3i$. On en déduit : $z' = - 1 + 4i$; **2)** L'affixe de O est 0. On en déduit : $z' = 3 + 3i$

21 page 362 du LIVRE :

1) Une écriture complexe de r est : $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z$ d'où $z' = \sqrt{2}i$.

2) $s = s_A = R(A ; \pi)$. Une écriture complexe de s est : $z' - z_A = e^{i\pi}(z - z_A)$. On en déduit : $z' = 1 - 7i$.

22 page 362 du LIVRE :

1) $r = R\left(A ; \dfrac{2\pi}{3}\right)$. Une écriture complexe de r est : $z' - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_A)$.

On en déduit : $z' = -\dfrac{7}{2} + i\left(1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) $S = s_{(Ox)}$. Donc $z' = \overline{z}$ et $z' = 1 - i$.

24 page 362 du LIVRE :

1. $b - z_I = e^{i\pi}(a - z_I)$ où I est le point d'affixe 1. La transformation cherchée est la rotation de centre I et d'angle π ou la symétrie de centre I ou l'homothétie de centre I et de rapport (- 1).

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

2. Soit J le point d'affixe i. La transformation cherchée est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3. Soit $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $(4 - 3i)$. La transformation cherchée est la translation de vecteur $\vec{w}$.

4. Soit Ω le point d'affixe $(-1 + i)$. La transformation cherchée est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

26 page 362 du LIVRE :

1. D'après l'écriture complexe d'une rotation et l'écriture exponentielle de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, on en déduit que r est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ où Ω est le point d'affixe i.

2. Une écriture complexe de r' est $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z - 1 - i) + 1 + i$.

EXERCICE N° 10 :

1) Soit z et z' les affixes respectives des points M et T(M).

$\text{T(M)} = \text{M} \iff z = i(z + 1) + 1 \iff z = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i.$

On en déduit que T a un unique point invariant : le point Ω d'affixe i.

2) $z' - \omega = z' - i = iz + 1 = i(z - i) = i(z - \omega)$.

3) Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, alors $z' - \omega = i(z - \omega) \iff z' - i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - i)$. On reconnaît une écriture complexe de la rotation de centre Ω , d'affixe i, et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE N° 11 :

On note z ; z' et z'' les affixes respectives des points M ; r(M) et t(M).

Une écriture complexe de r est : $z' - i = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - i)$ soit $z' = -iz - 1 + i$.

Une écriture complexe de t est : $z'' = z + 1 - 3i$.

Une écriture complexe de $r \circ t$ est : $z \overset{t}{\longmapsto} z + 1 - 3i \overset{r}{\longmapsto} -i(z + 1 - 3i) - 1 + i$.

Une écriture complexe de $r \circ t$ est donc : $z \longmapsto Z = -iz - 4$.

On recherche alors le point invariant par la transformation $r \circ t$.

Soit ω l'affixe de ce point invariant Ω. ω vérifie : $\omega = -i\omega - 4 \iff \omega = \frac{-4}{1 + i} = \frac{-4(1 - i)}{2} = -2 + 2i$.

On a : $Z = -iz - 4$ et $\omega = -i\omega - 4$, d'où : $Z - \omega = -i(z - \omega) \iff Z - \omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$.

On reconnaît une écriture complexe de la rotation de centre Ω(ω) et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Conclusion : $r \circ t$ est la rotation de centre Ω(ω) et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ où Ω est le point d'affixe $(-2 + 2i)$.

EXERCICE N° 12 (*ANNABAC 2012*) :

Exercice 2 page 110 : questions 1) ; 2) et 3) : correction pages 117 ; 118 et 119.

Exercice 2 pages 19//20 : correction pages 28 et 29.

Exercice 1 pages 39//40 : correction pages 45 ; 46 ; 47 et 48.

<u>Exercice 12 page 242 :</u> correction pages 255 et 256.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

Exercice 13 pages 313//314 : ***correction pages 314; 315 et 316.***

EXERCICE N° 13 :

n° 43 pages 365/366 du LIVRE.

1. a) Les coordonnées cartésiennes des points sont : A(3 ; 2) ; B(- 3 ; 0) et I(1 ; - 2).

1. b) On trouve Z = - i. On en déduit : $|Z| = 1$ et arg (Z) = $-\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Géométriquement, on obtient : $\dfrac{AI}{BI} = 1$ soit AI = BI et $(\overrightarrow{BI}\ ;\ \overrightarrow{AI}) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ soit $(\overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{IA}) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

On en déduit que le **triangle IAB est un triangle rectangle isocèle (direct) en I**.

1. c) On a : $z_C - z_A = 2(z_I - z_A)$. On trouve : $\boldsymbol{z_C = -1 - 6i}$.

1. d) On trouve : $\boldsymbol{z_D = 5 - 4i}$.

1. d)

* D = Bar{(A ; 1) ; (B ; - 1) ; (C ; 1)} $\Leftrightarrow 1.\overrightarrow{DA} + (-1).\overrightarrow{DB} + 1.\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

On en déduit que : $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$ soit $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ d'après Chasles.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont égaux, alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

* Par ailleurs, on sait que : C = h(A ; 2)(I) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow$ I est le milieu de [AC].
Comme ABCD est un parallélogramme, alors I est aussi le milieu de [BD].
Or, le triangle IAB est rectangle isocèle en I, donc les longueurs IA et IB sont égales et les droites (IA) et (IB) sont perpendiculaires. On prouve alors que (AC) et (BD) sont perpendiculaires et que les longueurs AC et BD sont égales.
* ABCD est un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires et de même longueur, alors **ABCD est un carré.**

2. Comme D = Bar{(A ; 1) ; (B ; - 1) ; (C ; 1)}, alors par la propriété fondamentale, on a :
pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (1 - 1 + 1)\overrightarrow{MD}$ soit $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$.
Par ailleurs, comme I est le milieu de [AC], alors par la propriété fondamentale, on a :
pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = (1+1)\overrightarrow{MI}$ soit $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

M $\in \Gamma_1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = \dfrac{1}{2} \times \|2\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow$ M équidistant de D et I soit M appartient à la médiatrice de [DI].

Conclusion : $\boldsymbol{\Gamma_1}$ est la médiatrice de [DI]. $\boldsymbol{\Gamma_1}$ est perpendiculaire à (DI) et passe par le milieu de [DI], qui a pour coordonnées (3 ; - 3).

3. a) M $\in \Gamma_2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow$ MD = $4\sqrt{5}$.

BD = $|z_D - z_B| = |5 - 4i - (-3)| = |8 - 4i| = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Comme BD = $4\sqrt{5}$, alors B appartient bien à l'ensemble Γ_2.

3. b) M $\in \Gamma_2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MD}\| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow$ MD = $4\sqrt{5} \Leftrightarrow$ M $\in \mathcal{C}(D\ ;\ 4\sqrt{5})$.

Conclusion : $\boldsymbol{\Gamma_2}$ est le cercle de centre D et de rayon $\boldsymbol{r = 4\sqrt{5}}$.

$\boldsymbol{\Gamma_2}$ est le cercle de centre D qui passe par le point B.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

FICHE EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

EXERCICE N° 1 : ***Extrait de l'épreuve du concours ENI-GEIPI-POLYTECH (mai 2010) 30 minutes maximum …***

1. On a : A(1 ; 3) ; B(2 ; 0) en coordonnées cartésiennes.

2. OA = $|z_A| = |1 + 3i| = \sqrt{10}$ et AB = $|z_B - z_A| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$.

On a donc : OA = AB, ce qui prouve que le **triangle OAB est isocèle en A**.

3. On a : C(2 ; 6) et D(- 2 ; 0) en coordonnées cartésiennes.

C est le symétrique de O par rapport à A $\Leftrightarrow$ A est le milieu de [OC]

$\Leftrightarrow z_A = \dfrac{z_O + z_C}{2}$

$\Leftrightarrow 2z_A - z_O = z_C$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{z_C = 2 + 6i}$

D est le symétrique de B par rapport à O $\Leftrightarrow$ O est le milieu de [DB]

$\Leftrightarrow z_O = \dfrac{z_D + z_B}{2}$

$\Leftrightarrow 2z_O - z_B = z_D$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{z_D = -2}$

4. E = $h(O ; \frac{1}{3})(A) \Leftrightarrow z_E - z_O = \frac{1}{3}(z_A - z_O) \Leftrightarrow z_E = \frac{1}{3}z_A \Leftrightarrow \boldsymbol{z_E = \frac{1}{3} + i}$.

Pour placer le point E, on place le point situé sur [OA] d'ordonnée égale à 1.

5. F = Bar{(A ; 2) ; (B ; - 3) ; (D ; 2)}

$$\boldsymbol{z_F} = \frac{2 \times z_A + (-3) \times z_B + 2 \times z_D}{2 + (-3) + 2} = \frac{2 \times (1 + 3i) + (-3) \times 2 + 2 \times (-2)}{1} = 2 + 6i - 6 - 4 = \boldsymbol{-8 + 6i}$$

Le point F a donc (- 8 ; 6) comme coordonnées cartésiennes.

6. On calcule (par exemple) les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$:

$Z_{\overrightarrow{BE}} = z_E - z_B = \frac{1}{3} + i - 2 = -\frac{5}{3} + i$.

$Z_{\overrightarrow{BF}} = z_F - z_B = -8 + 6i - 2 = -10 + 6i$

On constate que : $Z_{\overrightarrow{BF}} = -10 + 6i = 6\left(-\frac{5}{3} + i\right) = 6Z_{\overrightarrow{BE}}$

$Z_{\overrightarrow{BF}} = 6Z_{\overrightarrow{BE}} \Leftrightarrow \overrightarrow{BF} = 6\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow$ **les points B ; E et F sont alignés**.

7. a) $Z = \dfrac{z_F - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{-10}{-6i} = \dfrac{10i^2}{-6i} = -\dfrac{5}{3}i$. **Le réel *a*** vaut donc $\boldsymbol{-\frac{5}{3}}$.

7. b) $|\mathbf{Z}| = \left|-\frac{5}{3}i\right| = \frac{5}{3} \times |i| = \boldsymbol{\frac{5}{3}}$.

7. c) On a prouvé que : $Z = \dfrac{z_F - z_C}{z_B - z_C} = -\dfrac{5}{3}i$.

Z est non nul donc arg(Z) existe et : $\arg(Z) = \arg\left(-\frac{5}{3}i\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Or, $\arg(Z) = \arg\left(\dfrac{z_F - z_C}{z_B - z_C}\right) = (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CF})$. D'où : $(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CF}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Ceci prouve que le triangle CBF est rectangle en C.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6
EXERCICE N° 2 :
64 page 369 du LIVRE :

1. A est situé sur l'axe des réels et est tel que OA = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (construction à faire au compas) ;

B est situé sur la 1ère bissectrice des axes du repère et est tel que OB = 2. C est le symétrique de B par rapport à l'axe des réels.

2. Une écriture complexe de h est : $z' - z_A = -3(z - z_A)$. On en déduit que : $d = -3c + 4a$.

Comme $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $c = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, on trouve finalement : $d = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$. On place D tel que $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AC}$.

3. Une écriture complexe de R est : $z' - 0 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - 0)$. On trouve que : $z_E = e = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
On place E tel que E est le symétrique de B par rapport à O.

4. a) On prouve que $Z = \frac{d - b}{e - b} = \frac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}} = \frac{-1 + i}{-1 - i} = \frac{(-1 + i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$.

4. b) * Comme F est le symétrique de B par rapport à I, alors I est le milieu de [BF]. Les diagonales du quadrilatère BDFE se coupent en leur milieu I, donc BDFE est un parallélogramme.

* D'après 4) a., on a : $|Z| = \frac{BD}{BE} = |-i| = 1$, ce qui prouve que BD = BE.

BDFE est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs [BD] et [BE] de même longueur, donc BDFE est un losange.

* $Z \neq 0$ et d'après 4) a., on a : $\arg(Z) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Ceci prouve que (BE) et (BD) sont perpendiculaires. BDFE est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs [BD] et [BE] perpendiculaires, donc BDFE est un rectangle.
Conclusion : BDFE est à la fois un losange et un rectangle, donc **BDFE est un carré**.

87 page 374 du LIVRE :
1. VRAI.

Soit $r = R(O\ ;\ \frac{2\pi}{3})$. On a : $b = a \times e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $c = b \times e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a = c \times e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On en déduit que : $r(A) = B$; $r(B) = C$ et $r(C) = A$.
Puisque r est une isométrie, alors : AB = BC = CA, ce qui prouve que ABC est équilatéral.

2. FAUX. $\forall\ z \neq i$, on a :

$M(z) \in \Delta \iff (\overrightarrow{AM}, \vec{w}) = 0\ [\pi] \iff \arg\left(\frac{1 + i}{z - i}\right) = 0\ [\pi] \iff \frac{\pi}{4} - \arg(z - i) = 0\ [\pi] \iff \arg(z - i) = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$.

Autre méthode : Soit (E) l'ensemble des points M(z) tels que $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

A appartient à Δ, mais A n'appartient pas à (E) car $\arg(z - i)$ n'est pas défini lorsque $z = i$.

(E) est la demi-droite ouverte d'origine A, privée de A, et dirigée par $\vec{w}$.

3. FAUX.

$OM' = |z'| = \frac{1}{5} \times |1 + 3i| \times |z| = \frac{\sqrt{10}}{5} \times |z| = \frac{\sqrt{10}}{5} \times OM$. Pour tout point M distinct de O, on a $OM' \neq OM$.

Donc T n'est pas une isométrie et par suite n'est pas une rotation.

4. VRAI.
Soit s la symétrie de centre A. On a : $s = R(A\ ;\ \pi)$. Une écriture complexe de s est : $z' - i = e^{i\pi}(z - i)$.
On trouve bien que : $z' = -z + 2i$.

5. VRAI.

AMN est un triangle rectangle isocèle direct en A $\iff$ AM = AN et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE DES EXERCICES DU CHAPITRE 6

Soit r = R(A ; $\frac{\pi}{2}$). On a alors : r(M) = N. Une écriture complexe de r est : $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a)$ où a désigne l'affixe de A. Vu que l'image par la rotation r du point M est le point N, on en déduit l'égalité : $3i = i(3 + 2i - a) + a$. On trouve que $a = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i$.

EXERCICE N° 3 : *Extrait de l'épreuve du concours FESIC (mai 2010)*

A est le centre du repère considéré donc l'affixe de A est 0.

a. VRAI.

Vu que B' est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on prouve que : $b' = ib$.

Vu que C' est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, on prouve que : $c' = -ic$.

b. VRAI.

M est le milieu de [BC], donc son affixe m vérifie : $m = \frac{b + c}{2}$. On en déduit que : $\frac{c' - b'}{m} = -2i$.

c. FAUX. A ; B et C ne sont pas alignés, donc $b \neq -c$ et par suite $b' \neq c'$. Comme de plus, m est non nulle, alors $\arg\left(\frac{c' - b'}{m}\right)$ existe bien. $\arg\left(\frac{c' - b'}{m}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'})$ d'où : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Ceci prouve que (AM) et (B'C') sont perpendiculaires.

Si (AB) et (B'C') étaient perpendiculaires, on en déduirait que (AM) et (AB) seraient parallèles, c'est-à-dire que les points A ; B et M seraient alignés, ce qui est faux.

d. VRAI.

D'après la question b., on a : $|c' - b'| = |-2im| = 2 \times |i| \times |m - 0| \Leftrightarrow$ B'C' = 2 × 1 × AM.

EXERCICE N° 4 : *Extrait de Asie, juin 2010.*

Correction donnée à ceux qui le demandent !!!

EXERCICE N° 5 : *Extrait de Amérique du Nord, juin 2010.*

Correction donnée à ceux qui le demandent !!!

EXERCICE N° 6 : *Extrait de Nouvelle-Calédonie, novembre 2009.*

Correction donnée à ceux qui le demandent !!!